Nombres : entre rationnel et irrationnel, réel et imaginaire

Rémi Carles

CNRS & Univ. Montpellier

Pourquoi des nombres ?

- Compter
- Mesurer
- Prévoir

Ces trois aspects font des nombres un complément du langage.

Pourquoi des nombres ?

- Compter
- Mesurer
- Prévoir

Ces trois aspects font des nombres un complément du langage.

Pourquoi des nombres ?

- Compter
- Mesurer
- Prévoir

Ces trois aspects font des nombres un complément du langage.

Pourquoi des nombres ?

- Compter
- Mesurer
- Prévoir

Ces trois aspects font des nombres un complément du langage.

1, 2, 3... beaucoup

Le pluriel ne vaut rien à l'homme, et sitôt qu'on
Est plus de quatre, on est une bande de cons

Georges Brassens, Le pluriel

Début du 20e siècle, chez des peuples dits « primitifs » (Brésil, Australie et îles voisines) : un mot pour 1, un mot pour 2, 1+2, 2+2... et *beaucoup*.

Limites de la perception directe des nombres. Soit une série d'objets alignés : combien peut-on en compter d'un seul et rapide coup d'œil ?

1, 2, 3, voire 4... et c'est tout ! Au-delà, on compte par paquets (éventuellement de 1).

Exemple

En Océanie, chez plusieurs tribus : *singulier, duel, triel, quatriel... pluriel.*

Exemple

Visualisation d'un dé. Comptage par bâtons (remplissage de carrés).

1, 2, 3. . . beaucoup

Le pluriel ne vaut rien à l'homme, et sitôt qu'on
Est plus de quatre, on est une bande de cons

Georges Brassens, Le pluriel

Début du 20e siècle, chez des peuples dits « primitifs » (Brésil, Australie et îles voisines) : un mot pour 1, un mot pour 2, 1+2, 2+2. . . et *beaucoup*.

Limites de la perception directe des nombres. Soit une série d'objets alignés : combien peut-on en compter d'un seul et rapide coup d'œil ?

1, 2, 3, voire 4. . . et c'est tout ! Au-delà, on compte par paquets (éventuellement de 1).

Exemple

En Océanie, chez plusieurs tribus : *singulier, duel, triel, quatriel. . . pluriel.*

Exemple

Visualisation d'un dé. Comptage par bâtons (remplissage de carrés).

1, 2, 3... beaucoup

> *Le pluriel ne vaut rien à l'homme, et sitôt qu'on*
> *Est plus de quatre, on est une bande de cons*
>
> Georges Brassens, Le pluriel

Début du 20e siècle, chez des peuples dits « primitifs » (Brésil, Australie et îles voisines) : un mot pour 1, un mot pour 2, 1+2, 2+2... et *beaucoup*.

Limites de la perception directe des nombres. Soit une série d'objets alignés : combien peut-on en compter d'un seul et rapide coup d'œil ?
1, 2, 3, voire 4... et c'est tout ! Au-delà, on compte par paquets (éventuellement de 1).

Exemple

En Océanie, chez plusieurs tribus : *singulier, duel, triel, quatriel... pluriel.*

Exemple

Visualisation d'un dé. Comptage par bâtons (remplissage de carrés).

1, 2, 3... beaucoup

> *Le pluriel ne vaut rien à l'homme, et sitôt qu'on*
> *Est plus de quatre, on est une bande de cons*
>
> Georges Brassens, Le pluriel

Début du 20e siècle, chez des peuples dits « primitifs » (Brésil, Australie et îles voisines) : un mot pour 1, un mot pour 2, 1+2, 2+2... et *beaucoup*.

Limites de la perception directe des nombres. Soit une série d'objets alignés : combien peut-on en compter d'un seul et rapide coup d'œil ?

1, 2, 3, voire 4... et c'est tout ! Au-delà, on compte par paquets (éventuellement de 1).

Exemple

En Océanie, chez plusieurs tribus : *singulier, duel, triel, quatriel... pluriel.*

Exemple

Visualisation d'un dé. Comptage par bâtons (remplissage de carrés).

1, 2, 3... beaucoup

Le pluriel ne vaut rien à l'homme, et sitôt qu'on
Est plus de quatre, on est une bande de cons

Georges Brassens, Le pluriel

Début du 20e siècle, chez des peuples dits « primitifs » (Brésil, Australie et îles voisines) : un mot pour 1, un mot pour 2, 1+2, 2+2... et *beaucoup*.

Limites de la perception directe des nombres. Soit une série d'objets alignés : combien peut-on en compter d'un seul et rapide coup d'œil ?

1, 2, 3, voire 4... et c'est tout ! Au-delà, on compte par paquets (éventuellement de 1).

Exemple

En Océanie, chez plusieurs tribus : *singulier, duel, triel, quatriel... pluriel.*

Exemple

Visualisation d'un dé. Comptage par bâtons (remplissage de carrés).

1, 2, 3... beaucoup

> *Le pluriel ne vaut rien à l'homme, et sitôt qu'on*
> *Est plus de quatre, on est une bande de cons*
>
> Georges Brassens, Le pluriel

Début du 20e siècle, chez des peuples dits « primitifs » (Brésil, Australie et îles voisines) : un mot pour 1, un mot pour 2, 1+2, 2+2... et *beaucoup*.

Limites de la perception directe des nombres. Soit une série d'objets alignés : combien peut-on en compter d'un seul et rapide coup d'œil ?

1, 2, 3, voire 4... et c'est tout ! Au-delà, on compte par paquets (éventuellement de 1).

Exemple

En Océanie, chez plusieurs tribus : *singulier, duel, triel, quatriel... pluriel*.

Exemple

Visualisation d'un dé. Comptage par bâtons (remplissage de carrés).

1, 2, 3. . . beaucoup

Le pluriel ne vaut rien à l'homme, et sitôt qu'on
Est plus de quatre, on est une bande de cons

Georges Brassens, Le pluriel

Début du 20e siècle, chez des peuples dits « primitifs » (Brésil, Australie et îles voisines) : un mot pour 1, un mot pour 2, 1+2, 2+2. . . et *beaucoup*.

Limites de la perception directe des nombres. Soit une série d'objets alignés : combien peut-on en compter d'un seul et rapide coup d'œil ?

1, 2, 3, voire 4. . . et c'est tout ! Au-delà, on compte par paquets (éventuellement de 1).

Exemple

En Océanie, chez plusieurs tribus : *singulier, duel, triel, quatriel. . . pluriel*.

Exemple

Visualisation d'un dé. Comptage par bâtons (remplissage de carrés).

1, 2, 3... beaucoup

Le pluriel ne vaut rien à l'homme, et sitôt qu'on
Est plus de quatre, on est une bande de cons

Georges Brassens, Le pluriel

Début du 20e siècle, chez des peuples dits « primitifs » (Brésil, Australie et îles voisines) : un mot pour 1, un mot pour 2, 1+2, 2+2... et *beaucoup*.

Limites de la perception directe des nombres. Soit une série d'objets alignés : combien peut-on en compter d'un seul et rapide coup d'œil ?

1, 2, 3, voire 4... et c'est tout ! Au-delà, on compte par paquets (éventuellement de 1).

Exemple

En Océanie, chez plusieurs tribus : *singulier, duel, triel, quatriel... pluriel*.

Exemple

Visualisation d'un dé. Comptage par bâtons (remplissage de carrés).

Compter

Pourquoi compter ? Compter les forces en présence, ses moutons, etc.

Calcul : du latin *calculus* (caillou).
Origine (?) : un berger déposait autant de cailloux que de moutons quittant la bergerie $\rightsquigarrow$ on met en équivalence la quantité qu'on doit compter (les moutons, ou autre chose) avec un système fixe (des doigts, ou des cailloux).

Premières marques permettant de conserver des nombres : paléolithique ($\approx$ 30 000 ans). Encoches sur des os ou du bois.

Compter

Pourquoi compter ? Compter les forces en présence, ses moutons, etc.

Calcul : du latin *calculus* (caillou).

Origine (?) : un berger déposait autant de cailloux que de moutons quittant la bergerie $\rightsquigarrow$ on met en équivalence la quantité qu'on doit compter (les moutons, ou autre chose) avec un système fixe (des doigts, ou des cailloux).

Premières marques permettant de conserver des nombres : paléolithique ($\approx$ 30 000 ans). Encoches sur des os ou du bois.

Compter

Pourquoi compter ? Compter les forces en présence, ses moutons, etc.

Calcul : du latin *calculus* (caillou).

Origine (?) : un berger déposait autant de cailloux que de moutons quittant la bergerie $\rightsquigarrow$ on met en équivalence la quantité qu'on doit compter (les moutons, ou autre chose) avec un système fixe (des doigts, ou des cailloux).

Premières marques permettant de conserver des nombres : paléolithique ($\approx$ 30 000 ans). Encoches sur des os ou du bois.

Compter

Pourquoi compter ? Compter les forces en présence, ses moutons, etc.

Calcul : du latin *calculus* (caillou).
Origine (?) : un berger déposait autant de cailloux que de moutons quittant la bergerie $\rightsquigarrow$ on met en équivalence la quantité qu'on doit compter (les moutons, ou autre chose) avec un système fixe (des doigts, ou des cailloux).

Premières marques permettant de conserver des nombres : paléolithique ($\approx$ 30 000 ans). Encoches sur des os ou du bois.

Compter

Pourquoi compter ? Compter les forces en présence, ses moutons, etc.

Calcul : du latin *calculus* (caillou).
Origine (?) : un berger déposait autant de cailloux que de moutons quittant la bergerie $\rightsquigarrow$ on met en équivalence la quantité qu'on doit compter (les moutons, ou autre chose) avec un système fixe (des doigts, ou des cailloux).

Premières marques permettant de conserver des nombres : paléolithique ($\approx$ 30 000 ans). Encoches sur des os ou du bois.

Compter

Pourquoi compter ? Compter les forces en présence, ses moutons, etc.

Calcul : du latin *calculus* (caillou).
Origine (?) : un berger déposait autant de cailloux que de moutons quittant la bergerie $\rightsquigarrow$ on met en équivalence la quantité qu'on doit compter (les moutons, ou autre chose) avec un système fixe (des doigts, ou des cailloux).

Premières marques permettant de conserver des nombres : paléolithique ($\approx$ 30 000 ans). Encoches sur des os ou du bois.

Compter de grandes quantités

Compter sur ses doigts montre rapidement ses limites.

$\rightsquigarrow$ procéder par paquets, par groupements.

Nous comptons en base décimale : après 9, on ajoute un chiffre = on passe aux dizaines.

Origine vraisemblable : nous avons 10 doigts.

- Egypte : -3000.

- Grecs et Romains : bases 5 et 10... pas commode pour le calcul.

Compter de grandes quantités

Compter sur ses doigts montre rapidement ses limites.
$\rightsquigarrow$ procéder par paquets, par groupements.

Nous comptons en base décimale : après 9, on ajoute un chiffre = on passe aux dizaines.

Origine vraisemblable : nous avons 10 doigts.

- Egypte : -3000.
- Grecs et Romains : bases 5 et 10... pas commode pour le calcul.

Compter de grandes quantités

Compter sur ses doigts montre rapidement ses limites.
$\rightsquigarrow$ procéder par paquets, par groupements.

Nous comptons en base décimale : après 9, on ajoute un chiffre = on passe aux dizaines.

Origine vraisemblable : nous avons 10 doigts.

- Egypte : -3000.

- Grecs et Romains : bases 5 et 10… pas commode pour le calcul.

Compter de grandes quantités

Compter sur ses doigts montre rapidement ses limites.
$\rightsquigarrow$ procéder par paquets, par groupements.

Nous comptons en base décimale : après 9, on ajoute un chiffre = on passe aux dizaines.

Origine vraisemblable : nous avons 10 doigts.

- Egypte : -3000.

- Grecs et Romains : bases 5 et 10... pas commode pour le calcul.

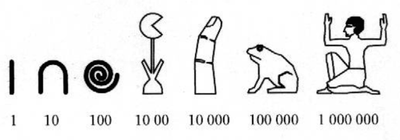
Compter de grandes quantités

Compter sur ses doigts montre rapidement ses limites.
$\rightsquigarrow$ procéder par paquets, par groupements.

Nous comptons en base décimale : après 9, on ajoute un chiffre = on passe aux dizaines.

Origine vraisemblable : nous avons 10 doigts.

- Egypte : -3000.



- Grecs et Romains : bases 5 et 10... pas commode pour le calcul.

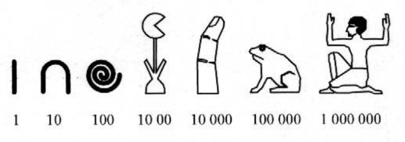
Compter de grandes quantités

Compter sur ses doigts montre rapidement ses limites.
$\rightsquigarrow$ procéder par paquets, par groupements.

Nous comptons en base décimale : après 9, on ajoute un chiffre = on passe aux dizaines.

Origine vraisemblable : nous avons 10 doigts.

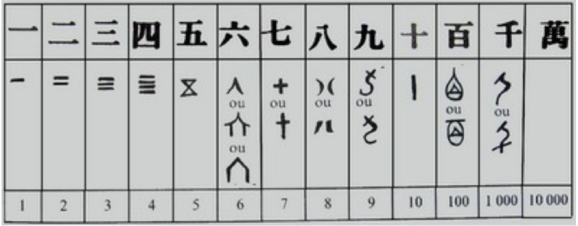
- Egypte : -3000.



- Grecs et Romains : bases 5 et 10... pas commode pour le calcul.

En Chine

- Dynastie Yin (entre -1400 et -1100),

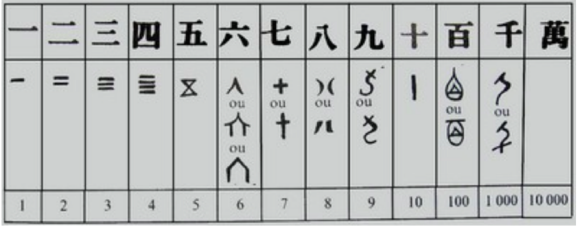


一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	10 000

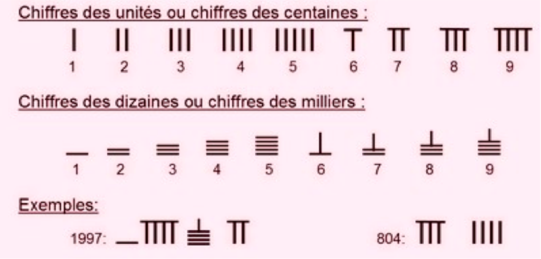
- 2e siècle avant J.C. : numération savante,

En Chine

- Dynastie Yin (entre -1400 et -1100),

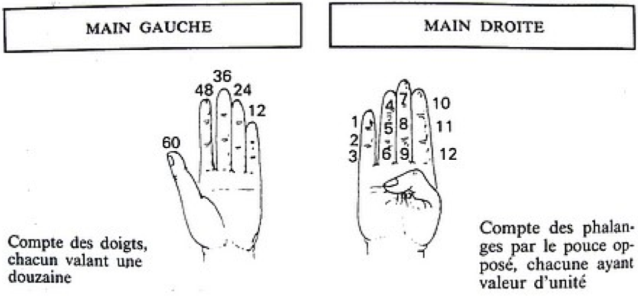


- 2e siècle avant J.C. : numération savante,



La base décimale n'est pas la seule

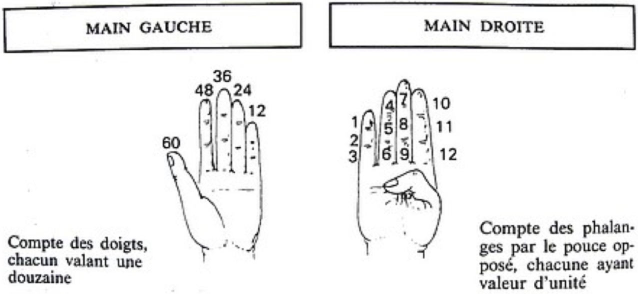
- Mésopotamie (-3500) : base 60 (sexagésimale),



- Base 2 (calcul binaire) : nos ordinateurs !
  0,1,10,11,100,101 = 0,1,2,3,4,5 etc.

La base décimale n'est pas la seule

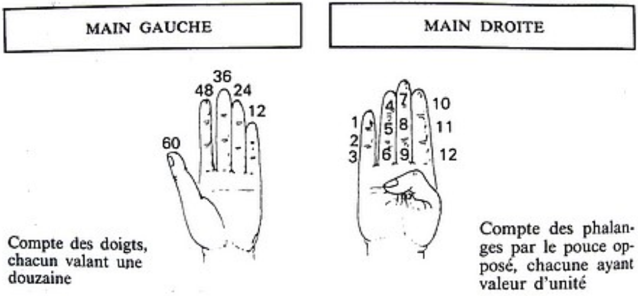
- Mésopotamie (-3500) : base 60 (sexagésimale),



- Base 2 (calcul binaire) : nos ordinateurs !
  0,1,10,11,100,101 = 0,1,2,3,4,5 etc.

La base décimale n'est pas la seule

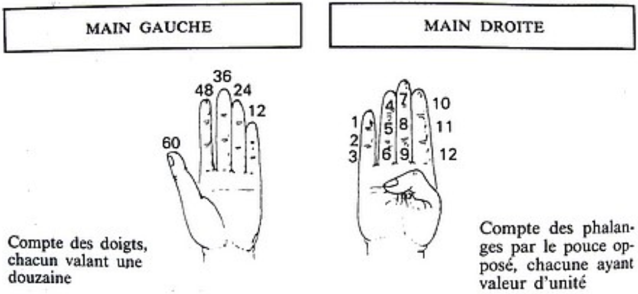
- Mésopotamie (-3500) : base 60 (sexagésimale),



- Base 2 (calcul binaire) : nos ordinateurs !
  0,1,10,11,100,101 = 0,1,2,3,4,5 etc.

La base décimale n'est pas la seule

- Mésopotamie (-3500) : base 60 (sexagésimale),



- Base 2 (calcul binaire) : nos ordinateurs !
  0,1,10,11,100,101 = 0,1,2,3,4,5 etc.

Les chiffres arabes... viennent de l'Inde

- 1,...,9 : grottes de Nana Ghât, 2e siècle avant J.C.
- 5e siècle : introduction du zéro pour lever les ambiguïtés de position (exemple : 806).
- 632 : les arabes s'étendent de l'Espagne à l'Inde.
- 8e siècle : Bagdad, riche pôle scientifique, emprunte la numérotation indienne.
- Le perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850) rédige le *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*.
- Gerbert d'Aurillac (945-1003 - devenu le pape Sylvestre II en 999) initie l'occident chrétien aux chiffres *indo-arabes*... mais sans la numération de position ni le zéro.
- Gros retard de l'Europe : il faut attendre le 13e siècle (Fibonacci) pour que le calcul indo-arabe pénètre réellement en occident.
- Notation actuelle : **N** ou $\mathbb{N}$ (entiers naturels).

Les chiffres arabes. . . viennent de l'Inde

- 1,. . .,9 : grottes de Nana Ghât, 2e siècle avant J.C.
- 5e siècle : introduction du zéro pour lever les ambiguïtés de position (exemple : 806).
- 632 : les arabes s'étendent de l'Espagne à l'Inde.
- 8e siècle : Bagdad, riche pôle scientifique, emprunte la numérotation indienne.
- Le perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850) rédige le *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*.
- Gerbert d'Aurillac (945-1003 - devenu le pape Sylvestre II en 999) initie l'occident chrétien aux chiffres *indo-arabes*. . . mais sans la numération de position ni le zéro.
- Gros retard de l'Europe : il faut attendre le 13e siècle (Fibonacci) pour que le calcul indo-arabe pénètre réellement en occident.
- Notation actuelle : **N** ou $\mathbb{N}$ (entiers naturels).

Les chiffres arabes... viennent de l'Inde

- 1,...,9 : grottes de Nana Ghât, 2e siècle avant J.C.
- 5e siècle : introduction du zéro pour lever les ambiguïtés de position (exemple : 806).
- 632 : les arabes s'étendent de l'Espagne à l'Inde.
- 8e siècle : Bagdad, riche pôle scientifique, emprunte la numérotation indienne.
- Le perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850) rédige le *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*.
- Gerbert d'Aurillac (945-1003 - devenu le pape Sylvestre II en 999) initie l'occident chrétien aux chiffres *indo-arabes*... mais sans la numération de position ni le zéro.
- Gros retard de l'Europe : il faut attendre le 13e siècle (Fibonacci) pour que le calcul indo-arabe pénètre réellement en occident.
- Notation actuelle : **N** ou $\mathbb{N}$ (entiers naturels).

Les chiffres arabes... viennent de l'Inde

- 1,...,9 : grottes de Nana Ghât, 2e siècle avant J.C.
- 5e siècle : introduction du zéro pour lever les ambiguïtés de position (exemple : 806).
- 632 : les arabes s'étendent de l'Espagne à l'Inde.
- 8e siècle : Bagdad, riche pôle scientifique, emprunte la numérotation indienne.
- Le perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850) rédige le *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*.
- Gerbert d'Aurillac (945-1003 - devenu le pape Sylvestre II en 999) initie l'occident chrétien aux chiffres *indo-arabes*... mais sans la numération de position ni le zéro.
- Gros retard de l'Europe : il faut attendre le 13e siècle (Fibonacci) pour que le calcul indo-arabe pénètre réellement en occident.
- Notation actuelle : **N** ou $\mathbb{N}$ (entiers naturels).

Les chiffres arabes... viennent de l'Inde

- 1,...,9 : grottes de Nana Ghât, 2e siècle avant J.C.
- 5e siècle : introduction du zéro pour lever les ambiguïtés de position (exemple : 806).
- 632 : les arabes s'étendent de l'Espagne à l'Inde.
- 8e siècle : Bagdad, riche pôle scientifique, emprunte la numérotation indienne.
- Le perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850) rédige le *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*.
- Gerbert d'Aurillac (945-1003 - devenu le pape Sylvestre II en 999) initie l'occident chrétien aux chiffres *indo-arabes*... mais sans la numération de position ni le zéro.
- Gros retard de l'Europe : il faut attendre le 13e siècle (Fibonacci) pour que le calcul indo-arabe pénètre réellement en occident.
- Notation actuelle : **N** ou $\mathbb{N}$ (entiers naturels).

Les chiffres arabes. . . viennent de l'Inde

- 1,. . .,9 : grottes de Nana Ghât, 2e siècle avant J.C.
- 5e siècle : introduction du zéro pour lever les ambiguïtés de position (exemple : 806).
- 632 : les arabes s'étendent de l'Espagne à l'Inde.
- 8e siècle : Bagdad, riche pôle scientifique, emprunte la numérotation indienne.
- Le perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850) rédige le *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*.
- Gerbert d'Aurillac (945-1003 - devenu le pape Sylvestre II en 999) initie l'occident chrétien aux chiffres *indo-arabes*. . . mais sans la numération de position ni le zéro.
- Gros retard de l'Europe : il faut attendre le 13e siècle (Fibonacci) pour que le calcul indo-arabe pénètre réellement en occident.
- Notation actuelle : **N** ou $\mathbb{N}$ (entiers naturels).

Les chiffres arabes... viennent de l'Inde

- 1,...,9 : grottes de Nana Ghât, 2e siècle avant J.C.
- 5e siècle : introduction du zéro pour lever les ambiguïtés de position (exemple : 806).
- 632 : les arabes s'étendent de l'Espagne à l'Inde.
- 8e siècle : Bagdad, riche pôle scientifique, emprunte la numérotation indienne.
- Le perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850) rédige le *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*.
- Gerbert d'Aurillac (945-1003 - devenu le pape Sylvestre II en 999) initie l'occident chrétien aux chiffres *indo-arabes*... mais sans la numération de position ni le zéro.
- Gros retard de l'Europe : il faut attendre le 13e siècle (Fibonacci) pour que le calcul indo-arabe pénètre réellement en occident.
- Notation actuelle : **N** ou $\mathbb{N}$ (entiers naturels).

Les chiffres arabes... viennent de l'Inde

- 1,...,9 : grottes de Nana Ghât, 2e siècle avant J.C.
- 5e siècle : introduction du zéro pour lever les ambiguïtés de position (exemple : 806).
- 632 : les arabes s'étendent de l'Espagne à l'Inde.
- 8e siècle : Bagdad, riche pôle scientifique, emprunte la numérotation indienne.
- Le perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850) rédige le *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*.
- Gerbert d'Aurillac (945-1003 - devenu le pape Sylvestre II en 999) initie l'occident chrétien aux chiffres *indo-arabes*... mais sans la numération de position ni le zéro.
- Gros retard de l'Europe : il faut attendre le 13e siècle (Fibonacci) pour que le calcul indo-arabe pénêtre réellement en occident.
- Notation actuelle : **N** ou $\mathbb{N}$ (entiers naturels).

Les chiffres arabes… viennent de l'Inde

- 1,…,9 : grottes de Nana Ghât, 2e siècle avant J.C.
- 5e siècle : introduction du zéro pour lever les ambiguïtés de position (exemple : 806).
- 632 : les arabes s'étendent de l'Espagne à l'Inde.
- 8e siècle : Bagdad, riche pôle scientifique, emprunte la numérotation indienne.
- Le perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850) rédige le *Livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens*.
- Gerbert d'Aurillac (945-1003 - devenu le pape Sylvestre II en 999) initie l'occident chrétien aux chiffres *indo-arabes*… mais sans la numération de position ni le zéro.
- Gros retard de l'Europe : il faut attendre le 13e siècle (Fibonacci) pour que le calcul indo-arabe pénètre réellement en occident.
- Notation actuelle : $\mathbf{N}$ ou $\mathbb{N}$ (entiers naturels).

Les entiers naturels ne suffisent pas

Davantage que considérer des nombres négatifs, il semble qu'il a été plus facile historiquement d'introduire des fractions. Typiquement, partager un butin, un gâteau, etc.

- Vers -3000 en Mésopotamie (Sumer) : fractions particulières (1/120, 1/60, 1/30, 1/10, 1/5). Vers -2000, davantage de fractions par le système sexagésimal.
- Vers -3000 en Egypte : fractions de la forme $1/n$, avec n entier naturel.
- 5e siècle avant J.C. en Grèce : écriture alphabétique de fractions, pour représenter des rapports de longueur (calculs compliqués malgré des notations peu commodes).

Les entiers naturels ne suffisent pas

Davantage que considérer des nombres négatifs, il semble qu'il a été plus facile historiquement d'introduire des fractions. Typiquement, partager un butin, un gâteau, etc.

- Vers -3000 en Mésopotamie (Sumer) : fractions particulières (1/120, 1/60, 1/30, 1/10, 1/5). Vers -2000, davantage de fractions par le système sexagésimal.
- Vers -3000 en Egypte : fractions de la forme $1/n$, avec n entier naturel.
- 5e siècle avant J.C. en Grèce : écriture alphabétique de fractions, pour représenter des rapports de longueur (calculs compliqués malgré des notations peu commodes).

Les entiers naturels ne suffisent pas

Davantage que considérer des nombres négatifs, il semble qu'il a été plus facile historiquement d'introduire des fractions. Typiquement, partager un butin, un gâteau, etc.

- Vers -3000 en Mésopotamie (Sumer) : fractions particulières (1/120, 1/60, 1/30, 1/10, 1/5). Vers -2000, davantage de fractions par le système sexagésimal.
- Vers -3000 en Egypte : fractions de la forme $1/n$, avec n entier naturel.
- 5e siècle avant J.C. en Grèce : écriture alphabétique de fractions, pour représenter des rapports de longueur (calculs compliqués malgré des notations peu commodes).

Les entiers naturels ne suffisent pas

Davantage que considérer des nombres négatifs, il semble qu'il a été plus facile historiquement d'introduire des fractions. Typiquement, partager un butin, un gâteau, etc.

- Vers -3000 en Mésopotamie (Sumer) : fractions particulières (1/120, 1/60, 1/30, 1/10, 1/5). Vers -2000, davantage de fractions par le système sexagésimal.
- Vers -3000 en Egypte : fractions de la forme $1/n$, avec n entier naturel.
- 5e siècle avant J.C. en Grèce : écriture alphabétique de fractions, pour représenter des rapports de longueur (calculs compliqués malgré des notations peu commodes).

Les entiers naturels ne suffisent pas

Davantage que considérer des nombres négatifs, il semble qu'il a été plus facile historiquement d'introduire des fractions. Typiquement, partager un butin, un gâteau, etc.

- Vers -3000 en Mésopotamie (Sumer) : fractions particulières ($1/120$, $1/60$, $1/30$, $1/10$, $1/5$). Vers -2000, davantage de fractions par le système sexagésimal.
- Vers -3000 en Egypte : fractions de la forme $1/n$, avec n entier naturel.
- 5e siècle avant J.C. en Grèce : écriture alphabétique de fractions, pour représenter des rapports de longueur (calculs compliqués malgré des notations peu commodes).

Les entiers naturels ne suffisent pas

Davantage que considérer des nombres négatifs, il semble qu'il a été plus facile historiquement d'introduire des fractions. Typiquement, partager un butin, un gâteau, etc.

- Vers -3000 en Mésopotamie (Sumer) : fractions particulières (1/120, 1/60, 1/30, 1/10, 1/5). Vers -2000, davantage de fractions par le système sexagésimal.
- Vers -3000 en Egypte : fractions de la forme $1/n$, avec n entier naturel.
- 5e siècle avant J.C. en Grèce : écriture alphabétique de fractions, pour représenter des rapports de longueur (calculs compliqués malgré des notations peu commodes).

Calculs sur les fractions

- Papyrus Rhind (Egypte, vers -1800)
  et tablettes babyloniennes de la même époque : calculs sur des fractions.

  Quand le scribe te dit 10 *est les* $\frac{2}{3}$ *et le* $\frac{1}{10}$ *de quoi ?*

  Traduction moderne : $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10$.

  $$\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = \frac{20}{30}x + \frac{3}{30}x = \frac{23}{30}x, \quad \text{donc} \quad x = \frac{300}{23}.$$

- Jiuzhang suanshu ou les Neuf chapitres sur l'art du calcul (Chine, -200) : 246 problèmes, fournissant des méthodes pour résoudre des problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité. Calculs avec des fractions et des nombres négatifs.

Plus généralement, une fraction est la solution d'une équation de la forme

$$ax = b, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{N}. \qquad x = \frac{b}{a}.$$

Calculs sur les fractions

- Papyrus Rhind (Egypte, vers -1800)
  et tablettes babyloniennes de la même époque : calculs sur des fractions.

  Quand le scribe te dit 10 *est les* $\frac{2}{3}$ *et le* $\frac{1}{10}$ *de quoi ?*

  Traduction moderne : $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{10}x = 10.$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = \frac{20}{30}x + \frac{3}{30}x = \frac{23}{30}x, \quad \text{donc} \quad x = \frac{300}{23}.$$

- Jiuzhang suanshu ou les Neuf chapitres sur l'art du calcul (Chine, -200) : 246 problèmes, fournissant des méthodes pour résoudre des problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité. Calculs avec des fractions et des nombres négatifs.

Plus généralement, une fraction est la solution d'une équation de la forme

$$ax = b, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{N}. \qquad x = \frac{b}{a}.$$

- Papyrus Rhind (Egypte, vers -1800)
  et tablettes babyloniennes de la même époque : calculs sur des fractions.

  Quand le scribe te dit 10 *est les* $\frac{2}{3}$ *et le* $\frac{1}{10}$ *de quoi ?*

  Traduction moderne : $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{10}x = 10.$

  $$\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = \frac{20}{30}x + \frac{3}{30}x = \frac{23}{30}x, \quad \text{donc} \quad x = \frac{300}{23}.$$

- Jiuzhang suanshu ou les Neuf chapitres sur l'art du calcul (Chine, -200) : 246 problèmes, fournissant des méthodes pour résoudre des problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité. Calculs avec des fractions et des nombres négatifs.

Plus généralement, une fraction est la solution d'une équation de la forme

$$ax = b, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{N}. \qquad x = \frac{b}{a}.$$

Calculs sur les fractions

- Papyrus Rhind (Egypte, vers -1800)
  et tablettes babyloniennes de la même époque : calculs sur des fractions.

  Quand le scribe te dit 10 *est les* $\frac{2}{3}$ *et le* $\frac{1}{10}$ *de quoi ?*

  Traduction moderne : $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{10}x = 10.$

  $$\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = \frac{20}{30}x + \frac{3}{30}x = \frac{23}{30}x, \quad \text{donc} \quad x = \frac{300}{23}.$$

- Jiuzhang suanshu ou les Neuf chapitres sur l'art du calcul (Chine, -200) : 246 problèmes, fournissant des méthodes pour résoudre des problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité. Calculs avec des fractions et des nombres négatifs.

Plus généralement, une fraction est la solution d'une équation de la forme

$$ax = b, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{N}. \qquad x = \frac{b}{a}.$$

Calculs sur les fractions

- Papyrus Rhind (Egypte, vers -1800)
  et tablettes babyloniennes de la même époque : calculs sur des fractions.

  Quand le scribe te dit 10 *est les* $\frac{2}{3}$ *et le* $\frac{1}{10}$ *de quoi ?*

  Traduction moderne : $\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = 10.$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = \frac{20}{30}x + \frac{3}{30}x = \frac{23}{30}x, \quad \text{donc} \quad x = \frac{300}{23}.$$

- Jiuzhang suanshu ou les Neuf chapitres sur l'art du calcul (Chine, -200) : 246 problèmes, fournissant des méthodes pour résoudre des problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité. Calculs avec des fractions et des nombres négatifs.

Plus généralement, une fraction est la solution d'une équation de la forme

$$ax = b, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{N}. \qquad x = \frac{b}{a}.$$

Calculs sur les fractions

- Papyrus Rhind (Egypte, vers -1800)
  et tablettes babyloniennes de la même époque : calculs sur des fractions.

  Quand le scribe te dit 10 *est les* $\frac{2}{3}$ *et le* $\frac{1}{10}$ *de quoi ?*

  Traduction moderne : $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{10}x = 10.$

  $$\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = \frac{20}{30}x + \frac{3}{30}x = \frac{23}{30}x, \quad \text{donc} \quad x = \frac{300}{23}.$$

- Jiuzhang suanshu ou les Neuf chapitres sur l'art du calcul (Chine, -200) : 246 problèmes, fournissant des méthodes pour résoudre des problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité. Calculs avec des fractions et des nombres négatifs.

Plus généralement, une fraction est la solution d'une équation de la forme

$$ax = b, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{N}. \qquad x = \frac{b}{a}.$$

Calculs sur les fractions

- Papyrus Rhind (Egypte, vers -1800)
  et tablettes babyloniennes de la même époque : calculs sur des fractions.

  Quand le scribe te dit 10 *est les* $\frac{2}{3}$ *et le* $\frac{1}{10}$ *de quoi ?*

  Traduction moderne : $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{10}x = 10.$

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{10}x = \frac{20}{30}x + \frac{3}{30}x = \frac{23}{30}x, \quad \text{donc} \quad x = \frac{300}{23}.$$

- Jiuzhang suanshu ou les Neuf chapitres sur l'art du calcul (Chine, -200) : 246 problèmes, fournissant des méthodes pour résoudre des problèmes quotidiens de l'ingénierie, de l'arpentage, du commerce et de la fiscalité. Calculs avec des fractions et des nombres négatifs.

Plus généralement, une fraction est la solution d'une équation de la forme

$$ax = b, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{N}. \qquad x = \frac{b}{a}.$$

Les nombres négatifs

- Sans doute introduits en Chine (Neuf chapitres sur l'art du calcul) : contient des résolutions de systèmes d'équations linéaires, par une méthode proche de celle due en Europe à... Carl Friedrich Gauss (1777-1855) !
- En Inde, apparaissent dans l'Arybhatiya, écrit par Âryabhata (476-550) : règle d'additions et de soustractions. Brahmagupta (598-660) :

  > *Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette.*

- Apparition tardive en Europe : Nicolas Chuquet (1445-1500), Gerolmo Cardano (Jérôme Cardan, 1501-1576) ⇝ résoudre des équations algébriques.

Exemple

Résoudre $x + 3 = 0$, ou $x^3 + 1 = 0$.

Les nombres négatifs

- Sans doute introduits en Chine (Neuf chapitres sur l'art du calcul) : contient des résolutions de systèmes d'équations linéaires, par une méthode proche de celle due en Europe à... Carl Friedrich Gauss (1777-1855) !
- En Inde, apparaissent dans l'Arybhatiya, écrit par Âryabhata (476-550) : règle d'additions et de soustractions. Brahmagupta (598-660) :

  > *Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette.*

- Apparition tardive en Europe : Nicolas Chuquet (1445-1500), Gerolmo Cardano (Jérôme Cardan, 1501-1576) $\rightsquigarrow$ résoudre des équations algébriques.

Exemple

Résoudre $x+3=0$, ou $x^3+1=0$.

Les nombres négatifs

- Sans doute introduits en Chine (Neuf chapitres sur l'art du calcul) : contient des résolutions de systèmes d'équations linéaires, par une méthode proche de celle due en Europe à... Carl Friedrich Gauss (1777-1855) !
- En Inde, apparaissent dans l'Arybhatiya, écrit par Âryabhata (476-550) : règle d'additions et de soustractions. Brahmagupta (598-660) :

  > *Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette.*

- Apparition tardive en Europe : Nicolas Chuquet (1445-1500), Gerolmo Cardano (Jérôme Cardan, 1501-1576) $\rightsquigarrow$ résoudre des équations algébriques.

Exemple

Résoudre $x+3=0$, ou $x^3+1=0$.

Les nombres négatifs

- Sans doute introduits en Chine (Neuf chapitres sur l'art du calcul) : contient des résolutions de systèmes d'équations linéaires, par une méthode proche de celle due en Europe à... Carl Friedrich Gauss (1777-1855) !
- En Inde, apparaissent dans l'Arybhatiya, écrit par Âryabhata (476-550) : règle d'additions et de soustractions. Brahmagupta (598-660) :

  > *Une dette retranchée du néant devient un bien, un bien retranché du néant devient une dette.*

- Apparition tardive en Europe : Nicolas Chuquet (1445-1500), Gerolmo Cardano (Jérôme Cardan, 1501-1576) $\rightsquigarrow$ résoudre des équations algébriques.

Exemple

Résoudre $x + 3 = 0$, ou $x^3 + 1 = 0$.

Les nombres négatifs : une adoption difficile

- Un tel besoin s'était fait ressentir bien avant, dans les écrits du perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850)... mais l'auteur a évité l'usage de nombres négatifs en ajoutant leur opposé des deux côtés de l'équation (plutôt que d'écrire $x = -2$, on peut écrire $x + 2 = 0$).

Une notion qui a eu du mal à s'imposer en Europe :

- MacLaurin (1698-1746) : ≪ L'usage du signe négatif en algèbre donne lieu à plusieurs conséquences qu'on a d'abord peine à admettre et ont donné l'occasion à des idées qui paraissent n'avoir aucun fondement réel. ≫
- D'Alembert (1717-1783, Encyclopédie) : ≪ Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, et que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. ≫

Les nombres négatifs : une adoption difficile

- Un tel besoin s'était fait ressentir bien avant, dans les écrits du perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850)... mais l'auteur a évité l'usage de nombres négatifs en ajoutant leur opposé des deux côtés de l'équation (plutôt que d'écrire $x = -2$, on peut écrire $x + 2 = 0$).

Une notion qui a eu du mal à s'imposer en Europe :

- MacLaurin (1698-1746) : « L'usage du signe négatif en algèbre donne lieu à plusieurs conséquences qu'on a d'abord peine à admettre et ont donné l'occasion à des idées qui paraissent n'avoir aucun fondement réel. »
- D'Alembert (1717-1783, Encyclopédie) : « Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, et que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. »

Les nombres négatifs : une adoption difficile

- Un tel besoin s'était fait ressentir bien avant, dans les écrits du perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850)... mais l'auteur a évité l'usage de nombres négatifs en ajoutant leur opposé des deux côtés de l'équation (plutôt que d'écrire $x = -2$, on peut écrire $x + 2 = 0$).

Une notion qui a eu du mal à s'imposer en Europe :

- MacLaurin (1698-1746) : « L'usage du signe négatif en algèbre donne lieu à plusieurs conséquences qu'on a d'abord peine à admettre et ont donné l'occasion à des idées qui paraissent n'avoir aucun fondement réel. »
- D'Alembert (1717-1783, Encyclopédie) : « Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, et que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. »

Les nombres négatifs : une adoption difficile

- Un tel besoin s'était fait ressentir bien avant, dans les écrits du perse Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (790-850)... mais l'auteur a évité l'usage de nombres négatifs en ajoutant leur opposé des deux côtés de l'équation (plutôt que d'écrire $x = -2$, on peut écrire $x + 2 = 0$).

Une notion qui a eu du mal à s'imposer en Europe :

- MacLaurin (1698-1746) : « L'usage du signe négatif en algèbre donne lieu à plusieurs conséquences qu'on a d'abord peine à admettre et ont donné l'occasion à des idées qui paraissent n'avoir aucun fondement réel. »
- D'Alembert (1717-1783, Encyclopédie) : « Il faut avouer qu'il n'est pas facile de fixer l'idée des quantités négatives, et que quelques habiles gens ont même contribué à l'embrouiller par les notions peu exactes qu'ils en ont données. Dire que la quantité négative est au-dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir. »

Les entiers relatifs

Aujourd'hui, on note **Z** ou $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs : entiers naturels auxquels on a adjoint un signe positif ou négatif (position relative par rapport à zéro).

Notation : apparaît au 20e siècle (Nicolas Bourbaki), comme initiale de l'allemand Zahlen (nombres).

Formellement : ce sont les solutions des équations de la forme $x = a$ ou $x + a = 0$ avec $a \in \mathbb{N}$.

Les entiers relatifs

Aujourd'hui, on note **Z** ou $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs : entiers naturels auxquels on a adjoint un signe positif ou négatif (position relative par rapport à zéro).

Notation : apparaît au 20e siècle (Nicolas Bourbaki), comme initiale de l'allemand Zahlen (nombres).

Formellement : ce sont les solutions des équations de la forme $x = a$ ou $x + a = 0$ avec $a \in \mathbb{N}$.

Les entiers relatifs

Aujourd'hui, on note **Z** ou $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs : entiers naturels auxquels on a adjoint un signe positif ou négatif (position relative par rapport à zéro).

Notation : apparaît au 20e siècle (Nicolas Bourbaki), comme initiale de l'allemand Zahlen (nombres).

Formellement : ce sont les solutions des équations de la forme $x = a$ ou $x + a = 0$ avec $a \in \mathbb{N}$.

Les rationnels

On note **Q** ou $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, qui sont définis comme le quotient de deux entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a}; \quad a, b \in \mathbb{Z}, \ a \neq 0 \right\}.$$

Notation : apparaît en 1895 (Peano), d'après l'initiale du mot italien quoziente.

Formellement : ce sont les solutions des équations de la forme

$$ax + b = 0, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Exemple

$\frac{1}{2} = 0,5 \quad ; \quad \frac{1}{3} = 0,333333\ldots$

Cas particulier : les nombres décimaux (nombre fini de chiffres après la virgule).

Les rationnels

On note **Q** ou $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, qui sont définis comme le quotient de deux entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a}; \quad a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0 \right\}.$$

Notation : apparaît en 1895 (Peano), d'après l'initiale du mot italien quoziente.

Formellement : ce sont les solutions des équations de la forme

$$ax + b = 0, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Exemple

$\frac{1}{2} = 0,5 \quad ; \quad \frac{1}{3} = 0,333333\ldots$

Cas particulier : les nombres décimaux (nombre fini de chiffres après la virgule).

Les rationnels

On note **Q** ou $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, qui sont définis comme le quotient de deux entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a}; \quad a, b \in \mathbb{Z}, \ a \neq 0 \right\}.$$

Notation : apparaît en 1895 (Peano), d'après l'initiale du mot italien quoziente.

Formellement : ce sont les solutions des équations de la forme

$$ax + b = 0, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Exemple

$\frac{1}{2} = 0,5 \quad ; \quad \frac{1}{3} = 0,333333\ldots$

Cas particulier : les nombres décimaux (nombre fini de chiffres après la virgule).

Les rationnels

On note **Q** ou $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, qui sont définis comme le quotient de deux entiers relatifs :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a}; \quad a, b \in \mathbb{Z},\ a \neq 0 \right\}.$$

Notation : apparaît en 1895 (Peano), d'après l'initiale du mot italien quoziente.

Formellement : ce sont les solutions des équations de la forme

$$ax + b = 0, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Exemple

$\frac{1}{2} = 0,5 \quad ; \quad \frac{1}{3} = 0,333333\ldots$

Cas particulier : les nombres décimaux (nombre fini de chiffres après la virgule).

La géométrie impose l'irrationnel

Mesurer la diagonale d'un carré de côté 1 : -1700 à Babylone $\rightsquigarrow$ valeur approchée assez précise.

Au 5e siècle avant J.C., les pythagoriciens découvrent l'impossibilité de trouver une solution fractionnaire. Rappel :

Si $a = b = 1$, alors $c = \sqrt{2}$.

La géométrie impose l'irrationnel

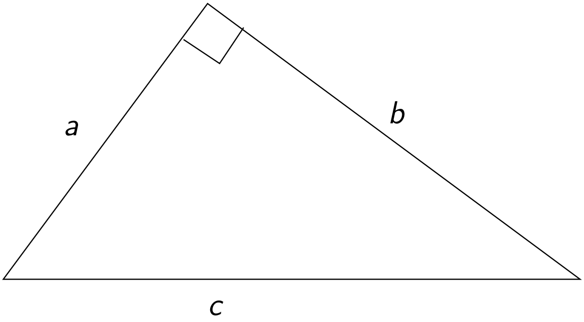
Mesurer la diagonale d'un carré de côté 1 : -1700 à Babylone $\rightsquigarrow$ valeur approchée assez précise.

Au 5e siècle avant J.C., les pythagoriciens découvrent l'impossibilité de trouver une solution fractionnaire. Rappel :

Si $a = b = 1$, alors $c = \sqrt{2}$.

La géométrie impose l'irrationnel

Mesurer la diagonale d'un carré de côté 1 : -1700 à Babylone $\rightsquigarrow$ valeur approchée assez précise.
Au 5e siècle avant J.C., les pythagoriciens découvrent l'impossibilité de trouver une solution fractionnaire. Rappel :



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Si $a = b = 1$, alors $c = \sqrt{2}$.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Exemple de preuve par l'absurde

- Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ avec a et b entiers.
- Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1 (fraction irréductible).
- On a $b = a\sqrt{2}$, donc $b^2 = 2a^2$: b^2 est divisible par 2, donc b aussi.
- Ainsi, b^2 est divisible par 4, $b^2 = 4p$ pour un entier p, et $a^2 = 2p$: a^2 est pair, donc a aussi.
- Ce qui fait que 2 est un facteur commun à a et b, ce qu'on avait exclu : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Conclusion : il ne suffit pas de considérer des nombres rationnels pour mesurer.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Exemple de preuve par l'absurde

• Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ avec a et b entiers.

• Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1 (fraction irréductible).

• On a $b = a\sqrt{2}$, donc $b^2 = 2a^2$: b^2 est divisible par 2, donc b aussi.

• Ainsi, b^2 est divisible par 4, $b^2 = 4p$ pour un entier p, et $a^2 = 2p$: a^2 est pair, donc a aussi.

• Ce qui fait que 2 est un facteur commun à a et b, ce qu'on avait exclu : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Conclusion : il ne suffit pas de considérer des nombres rationnels pour mesurer.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Exemple de preuve par l'absurde

• Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ avec a et b entiers.

• Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1 (fraction irréductible).

• On a $b = a\sqrt{2}$, donc $b^2 = 2a^2$: b^2 est divisible par 2, donc b aussi.

• Ainsi, b^2 est divisible par 4, $b^2 = 4p$ pour un entier p, et $a^2 = 2p$: a^2 est pair, donc a aussi.

• Ce qui fait que 2 est un facteur commun à a et b, ce qu'on avait exclu : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Conclusion : il ne suffit pas de considérer des nombres rationnels pour mesurer.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Exemple de preuve par l'absurde

• Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ avec a et b entiers.

• Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1 (fraction irréductible).

• On a $b = a\sqrt{2}$, donc $b^2 = 2a^2$: b^2 est divisible par 2, donc b aussi.

• Ainsi, b^2 est divisible par 4, $b^2 = 4p$ pour un entier p, et $a^2 = 2p$: a^2 est pair, donc a aussi.

• Ce qui fait que 2 est un facteur commun à a et b, ce qu'on avait exclu : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Conclusion : il ne suffit pas de considérer des nombres rationnels pour mesurer.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Exemple de preuve par l'absurde

- Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ avec a et b entiers.
- Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1 (fraction irréductible).
- On a $b = a\sqrt{2}$, donc $b^2 = 2a^2$: b^2 est divisible par 2, donc b aussi.
- Ainsi, b^2 est divisible par 4, $b^2 = 4p$ pour un entier p, et $a^2 = 2p$: a^2 est pair, donc a aussi.
- Ce qui fait que 2 est un facteur commun à a et b, ce qu'on avait exclu : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Conclusion : il ne suffit pas de considérer des nombres rationnels pour mesurer.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Exemple de preuve par l'absurde

• Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ avec a et b entiers.

• Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1 (fraction irréductible).

• On a $b = a\sqrt{2}$, donc $b^2 = 2a^2$: b^2 est divisible par 2, donc b aussi.

• Ainsi, b^2 est divisible par 4, $b^2 = 4p$ pour un entier p, et $a^2 = 2p$: a^2 est pair, donc a aussi.

• Ce qui fait que 2 est un facteur commun à a et b, ce qu'on avait exclu : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Conclusion : il ne suffit pas de considérer des nombres rationnels pour mesurer.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Exemple de preuve par l'absurde

• Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ avec a et b entiers.

• Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1 (fraction irréductible).

• On a $b = a\sqrt{2}$, donc $b^2 = 2a^2$: b^2 est divisible par 2, donc b aussi.

• Ainsi, b^2 est divisible par 4, $b^2 = 4p$ pour un entier p, et $a^2 = 2p$: a^2 est pair, donc a aussi.

• Ce qui fait que 2 est un facteur commun à a et b, ce qu'on avait exclu : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Conclusion : il ne suffit pas de considérer des nombres rationnels pour mesurer.

Et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel

Exemple de preuve par l'absurde

• Supposons qu'on puisse écrire $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ avec a et b entiers.

• Quitte à simplifier la fraction, on peut supposer que a et b n'ont pas de diviseur commun autre que 1 (fraction irréductible).

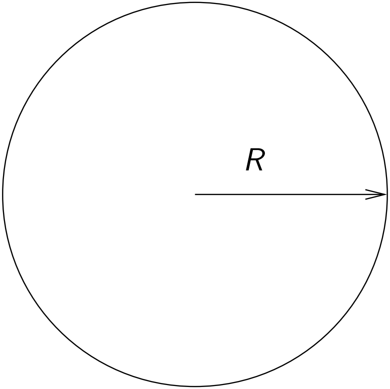
• On a $b = a\sqrt{2}$, donc $b^2 = 2a^2$: b^2 est divisible par 2, donc b aussi.

• Ainsi, b^2 est divisible par 4, $b^2 = 4p$ pour un entier p, et $a^2 = 2p$: a^2 est pair, donc a aussi.

• Ce qui fait que 2 est un facteur commun à a et b, ce qu'on avait exclu : $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

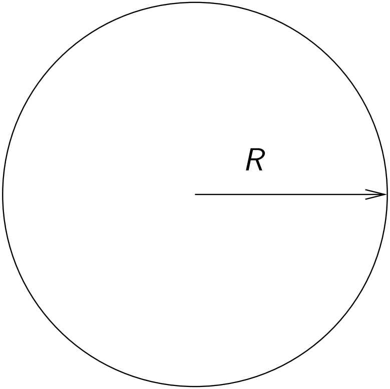
Conclusion : il ne suffit pas de considérer des nombres rationnels pour mesurer.

Une autre mesure importante



Longueur : $2\pi R$.
Surface : πR^2.
Quelle valeur pour π ?

Une autre mesure importante



Longueur : $2\pi R$.
Surface : πR^2.
Quelle valeur pour π ?

Décidément, la géométrie veut de l'irrationnel

- Babyloniens : $\pi \approx 3$ ou $\pi \approx 3 + 1/8$.
- Même approximation $\pi \approx 3,125$ en Inde (-400) et en occident (jusqu'au 16e siècle).
- Archimède : $3 + \dfrac{10}{71} < \pi < 3 + \dfrac{1}{7}$.
- Tsou Tch'ang Tche (430-501) : $3,1415926 < \pi < 3,1415927$.
- Il faut attendre la fin du 16e siècle pour que les Européens obtiennent de très bonnes approximations (33 décimales exactes).

Quadrature du cercle : trouver (à la règle et au compas) un carré ayant même surface qu'un cercle donné.
Impossible, car π est transcendant (« pire qu'irrationnel »).

Décidément, la géométrie veut de l'irrationnel

- Babyloniens : $\pi \approx 3$ ou $\pi \approx 3 + 1/8$.
- Même approximation $\pi \approx 3,125$ en Inde (-400) et en occident (jusqu'au 16e siècle).
- Archimède : $3 + \dfrac{10}{71} < \pi < 3 + \dfrac{1}{7}$.
- Tsou Tch'ang Tche (430-501) : $3,1415926 < \pi < 3,1415927$.
- Il faut attendre la fin du 16e siècle pour que les Européens obtiennent de très bonnes approximations (33 décimales exactes).

Quadrature du cercle : trouver (à la règle et au compas) un carré ayant même surface qu'un cercle donné.
Impossible, car π est transcendant (« pire qu'irrationnel »).

Décidément, la géométrie veut de l'irrationnel

- Babyloniens : $\pi \approx 3$ ou $\pi \approx 3 + 1/8$.
- Même approximation $\pi \approx 3,125$ en Inde (-400) et en occident (jusqu'au 16e siècle).
- Archimède : $3 + \dfrac{10}{71} < \pi < 3 + \dfrac{1}{7}$.
- Tsou Tch'ang Tche (430-501) : $3,1415926 < \pi < 3,1415927$.
- Il faut attendre la fin du 16e siècle pour que les Européens obtiennent de très bonnes approximations (33 décimales exactes).

Quadrature du cercle : trouver (à la règle et au compas) un carré ayant même surface qu'un cercle donné.
Impossible, car π est transcendant (« pire qu'irrationnel »).

Décidément, la géométrie veut de l'irrationnel

- Babyloniens : $\pi \approx 3$ ou $\pi \approx 3 + 1/8$.
- Même approximation $\pi \approx 3,125$ en Inde (-400) et en occident (jusqu'au 16e siècle).
- Archimède : $3 + \dfrac{10}{71} < \pi < 3 + \dfrac{1}{7}$.
- Tsou Tch'ang Tche (430-501) : $3,1415926 < \pi < 3,1415927$.
- Il faut attendre la fin du 16e siècle pour que les Européens obtiennent de très bonnes approximations (33 décimales exactes).

Quadrature du cercle : trouver (à la règle et au compas) un carré ayant même surface qu'un cercle donné.
Impossible, car π est transcendant (« pire qu'irrationnel »).

Décidément, la géométrie veut de l'irrationnel

- Babyloniens : $\pi \approx 3$ ou $\pi \approx 3 + 1/8$.
- Même approximation $\pi \approx 3,125$ en Inde (-400) et en occident (jusqu'au 16e siècle).
- Archimède : $3 + \dfrac{10}{71} < \pi < 3 + \dfrac{1}{7}$.
- Tsou Tch'ang Tche (430-501) : $3,1415926 < \pi < 3,1415927$.
- Il faut attendre la fin du 16e siècle pour que les Européens obtiennent de très bonnes approximations (33 décimales exactes).

Quadrature du cercle : trouver (à la règle et au compas) un carré ayant même surface qu'un cercle donné.
Impossible, car π est transcendant (« pire qu'irrationnel »).

Décidément, la géométrie veut de l'irrationnel

- Babyloniens : $\pi \approx 3$ ou $\pi \approx 3 + 1/8$.
- Même approximation $\pi \approx 3,125$ en Inde (-400) et en occident (jusqu'au 16e siècle).
- Archimède : $3 + \dfrac{10}{71} < \pi < 3 + \dfrac{1}{7}$.
- Tsou Tch'ang Tche (430-501) : $3,1415926 < \pi < 3,1415927$.
- Il faut attendre la fin du 16e siècle pour que les Européens obtiennent de très bonnes approximations (33 décimales exactes).

Quadrature du cercle : trouver (à la règle et au compas) un carré ayant même surface qu'un cercle donné.

Impossible, car π est transcendant (« pire qu'irrationnel »).

Décidément, la géométrie veut de l'irrationnel

- Babyloniens : $\pi \approx 3$ ou $\pi \approx 3 + 1/8$.
- Même approximation $\pi \approx 3,125$ en Inde (-400) et en occident (jusqu'au 16e siècle).
- Archimède : $3 + \dfrac{10}{71} < \pi < 3 + \dfrac{1}{7}$.
- Tsou Tch'ang Tche (430-501) : $3,1415926 < \pi < 3,1415927$.
- Il faut attendre la fin du 16e siècle pour que les Européens obtiennent de très bonnes approximations (33 décimales exactes).

Quadrature du cercle : trouver (à la règle et au compas) un carré ayant même surface qu'un cercle donné.
Impossible, car π est transcendant (« pire qu'irrationnel »).

Rationnels/irrationnels/transcendants

On a vu qu'on peut définir un nombre rationnel comme étant la solution d'une équation de la forme

$$ax + b = 0, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Un nombre irrationnel est un nombre « qui existe » (qui provient par exemple d'une mesure), et qui n'est solution d'aucune équation de la forme ci-dessus.

Un nombre transcendant est un nombre irrationnel qui en outre n'est solution d'aucune équation de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{Z}.$$

Il a fallu attendre 1882 pour que Ferdinand Lindemann démontre que π est transcendant, et donc que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution.

Rationnels/irrationnels/transcendants

On a vu qu'on peut définir un nombre rationnel comme étant la solution d'une équation de la forme

$$ax + b = 0, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Un nombre irrationnel est un nombre « qui existe » (qui provient par exemple d'une mesure), et qui n'est solution d'aucune équation de la forme ci-dessus.

Un nombre transcendant est un nombre irrationnel qui en outre n'est solution d'aucune équation de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{Z}.$$

Il a fallu attendre 1882 pour que Ferdinand Lindemann démontre que π est transcendant, et donc que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution.

Rationnels/irrationnels/transcendants

On a vu qu'on peut définir un nombre rationnel comme étant la solution d'une équation de la forme

$$ax + b = 0, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Un nombre irrationnel est un nombre « qui existe » (qui provient par exemple d'une mesure), et qui n'est solution d'aucune équation de la forme ci-dessus.

Un nombre transcendant est un nombre irrationnel qui en outre n'est solution d'aucune équation de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{Z}.$$

Il a fallu attendre 1882 pour que Ferdinand Lindemann démontre que π est transcendant, et donc que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution.

Rationnels/irrationnels/transcendants

On a vu qu'on peut définir un nombre rationnel comme étant la solution d'une équation de la forme

$$ax + b = 0, \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Un nombre irrationnel est un nombre « qui existe » (qui provient par exemple d'une mesure), et qui n'est solution d'aucune équation de la forme ci-dessus.

Un nombre transcendant est un nombre irrationnel qui en outre n'est solution d'aucune équation de la forme

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N},\ a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{Z}.$$

Il a fallu attendre 1882 pour que Ferdinand Lindemann démontre que π est transcendant, et donc que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution.

Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté **R** ou $\mathbb{R}$: il est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Un nombre réel s'écrit comme un nombre entier, puis un nombre fini ou inifini de décimales (après la virgule).

On peut « tout » mesurer grâce aux nombres réels.

Quelques propriétés « étonnantes »

- On peut toujours comparer deux nombres réels : si $a, b \in \mathbb{R}$ sont différents, alors soit $a > b$, soit $a < b$.
- Entre deux nombres rationnels différents, il existe un irrationnel.
- Entre deux nombres irrationnels différents, il existe un rationnel.
- Du coup, entre deux nombres rationnels différents, il existe une infinité d'irrationnels.

On touche du doigt le calcul infinitésimal, qui repose sur une notion d'infiniment petit (calcul différentiel, calcul intégral).

Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté **R** ou $\mathbb{R}$: il est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Un nombre réel s'écrit comme un nombre entier, puis un nombre fini ou inifini de décimales (après la virgule).

On peut « tout » mesurer grâce aux nombres réels.

Quelques propriétés « étonnantes »

- On peut toujours comparer deux nombres réels : si $a, b \in \mathbb{R}$ sont différents, alors soit $a > b$, soit $a < b$.
- Entre deux nombres rationnels différents, il existe un irrationnel.
- Entre deux nombres irrationnels différents, il existe un rationnel.
- Du coup, entre deux nombres rationnels différents, il existe une infinité d'irrationnels.

On touche du doigt le calcul infinitésimal, qui repose sur une notion d'infiniment petit (calcul différentiel, calcul intégral).

Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté **R** ou $\mathbb{R}$: il est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Un nombre réel s'écrit comme un nombre entier, puis un nombre fini ou inifini de décimales (après la virgule).

On peut « tout » mesurer grâce aux nombres réels.

Quelques propriétés « étonnantes »

- On peut toujours comparer deux nombres réels : si $a, b \in \mathbb{R}$ sont différents, alors soit $a > b$, soit $a < b$.
- Entre deux nombres rationnels différents, il existe un irrationnel.
- Entre deux nombres irrationnels différents, il existe un rationnel.
- Du coup, entre deux nombres rationnels différents, il existe une infinité d'irrationnels.

On touche du doigt le calcul infinitésimal, qui repose sur une notion d'infiniment petit (calcul différentiel, calcul intégral).

Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté **R** ou $\mathbb{R}$: il est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Un nombre réel s'écrit comme un nombre entier, puis un nombre fini ou inifini de décimales (après la virgule).

On peut « tout » mesurer grâce aux nombres réels.

Quelques propriétés « étonnantes »

- On peut toujours comparer deux nombres réels : si $a, b \in \mathbb{R}$ sont différents, alors soit $a > b$, soit $a < b$.
- Entre deux nombres rationnels différents, il existe un irrationnel.
- Entre deux nombres irrationnels différents, il existe un rationnel.
- Du coup, entre deux nombres rationnels différents, il existe une infinité d'irrationnels.

On touche du doigt le calcul infinitésimal, qui repose sur une notion d'infiniment petit (calcul différentiel, calcul intégral).

Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté **R** ou $\mathbb{R}$: il est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Un nombre réel s'écrit comme un nombre entier, puis un nombre fini ou inifini de décimales (après la virgule).

On peut « tout » mesurer grâce aux nombres réels.

Quelques propriétés « étonnantes »

- On peut toujours comparer deux nombres réels : si $a, b \in \mathbb{R}$ sont différents, alors soit $a > b$, soit $a < b$.
- Entre deux nombres rationnels différents, il existe un irrationnel.
- Entre deux nombres irrationnels différents, il existe un rationnel.
- Du coup, entre deux nombres rationnels différents, il existe une infinité d'irrationnels.

On touche du doigt le calcul infinitésimal, qui repose sur une notion d'infiniment petit (calcul différentiel, calcul intégral).

Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté **R** ou $\mathbb{R}$: il est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Un nombre réel s'écrit comme un nombre entier, puis un nombre fini ou inifini de décimales (après la virgule).

On peut « tout » mesurer grâce aux nombres réels.

Quelques propriétés « étonnantes »

- On peut toujours comparer deux nombres réels : si $a, b \in \mathbb{R}$ sont différents, alors soit $a > b$, soit $a < b$.
- Entre deux nombres rationnels différents, il existe un irrationnel.
- Entre deux nombres irrationnels différents, il existe un rationnel.
- Du coup, entre deux nombres rationnels différents, il existe une infinité d'irrationnels.

On touche du doigt le calcul infinitésimal, qui repose sur une notion d'infiniment petit (calcul différentiel, calcul intégral).

L'ensemble des nombres réels est noté **R** ou $\mathbb{R}$: il est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Un nombre réel s'écrit comme un nombre entier, puis un nombre fini ou inifini de décimales (après la virgule).

On peut « tout » mesurer grâce aux nombres réels.

Quelques propriétés « étonnantes »

- On peut toujours comparer deux nombres réels : si $a, b \in \mathbb{R}$ sont différents, alors soit $a > b$, soit $a < b$.
- Entre deux nombres rationnels différents, il existe un irrationnel.
- Entre deux nombres irrationnels différents, il existe un rationnel.
- Du coup, entre deux nombres rationnels différents, il existe une infinité d'irrationnels.

On touche du doigt le calcul infinitésimal, qui repose sur une notion d'infiniment petit (calcul différentiel, calcul intégral).

Les nombres réels

L'ensemble des nombres réels est noté **R** ou $\mathbb{R}$: il est constitué des nombres rationnels et des nombres irrationnels.

Un nombre réel s'écrit comme un nombre entier, puis un nombre fini ou inifini de décimales (après la virgule).

On peut « tout » mesurer grâce aux nombres réels.

Quelques propriétés « étonnantes »

- On peut toujours comparer deux nombres réels : si $a, b \in \mathbb{R}$ sont différents, alors soit $a > b$, soit $a < b$.
- Entre deux nombres rationnels différents, il existe un irrationnel.
- Entre deux nombres irrationnels différents, il existe un rationnel.
- Du coup, entre deux nombres rationnels différents, il existe une infinité d'irrationnels.

On touche du doigt le calcul infinitésimal, qui repose sur une notion d'infiniment petit (calcul différentiel, calcul intégral).

Vertige de l'infini

- Il existe une infinité d'entiers naturels.
- Il existe « autant » d'entiers relatifs.
- Il existe « autant » de nombres rationnels (ensemble dénombrable).
- Il existe « beaucoup plus » de nombres réels : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Vertige de l'infini

- Il existe une infinité d'entiers naturels.
- Il existe « autant » d'entiers relatifs.
- Il existe « autant » de nombres rationnels (ensemble dénombrable).
- Il existe « beaucoup plus » de nombres réels : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Vertige de l'infini

- Il existe une infinité d'entiers naturels.
- Il existe $\ll$ autant $\gg$ d'entiers relatifs.
- Il existe $\ll$ autant $\gg$ de nombres rationnels (ensemble dénombrable).
- Il existe $\ll$ beaucoup plus $\gg$ de nombres réels : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Vertige de l'infini

- Il existe une infinité d'entiers naturels.
- Il existe « autant » d'entiers relatifs.
- Il existe « autant » de nombres rationnels (ensemble dénombrable).
- Il existe « beaucoup plus » de nombres réels : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Des équations algébriques

Nous avons vu comment résoudre :

- Les équations de la forme $x = a$, a entier : x entier (tautologique...).
- Les équations de la forme $ax + b = 0$, avec a et b entiers : nombres rationnels.
- L'équation $x^2 = 2$.
- Plus généralement (dès les Babyloniens), si $ax^2 + bx + c = 0$, alors les solutions sont

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots \text{ si } b^2 \geqslant 4ac.$$

Et sinon ?... Résoudre $x^2 + 1 = 0$, impossible ?...

Des équations algébriques

Nous avons vu comment résoudre :

- Les équations de la forme $x = a$, a entier : x entier (tautologique. . .).
- Les équations de la forme $ax + b = 0$, avec a et b entiers : nombres rationnels.
- L'équation $x^2 = 2$.
- Plus généralement (dès les Babyloniens), si $ax^2 + bx + c = 0$, alors les solutions sont

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots \text{ si } b^2 \geqslant 4ac.$$

Et sinon ?. . . Résoudre $x^2 + 1 = 0$, impossible ?. . .

Des équations algébriques

Nous avons vu comment résoudre :

- Les équations de la forme $x = a$, a entier : x entier (tautologique...).
- Les équations de la forme $ax + b = 0$, avec a et b entiers : nombres rationnels.
- L'équation $x^2 = 2$.
- Plus généralement (dès les Babyloniens), si $ax^2 + bx + c = 0$, alors les solutions sont

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots \text{ si } b^2 \geqslant 4ac.$$

Et sinon ?... Résoudre $x^2 + 1 = 0$, impossible ?...

Des équations algébriques

Nous avons vu comment résoudre :

- Les équations de la forme $x = a$, a entier : x entier (tautologique...).
- Les équations de la forme $ax + b = 0$, avec a et b entiers : nombres rationnels.
- L'équation $x^2 = 2$.
- Plus généralement (dès les Babyloniens), si $ax^2 + bx + c = 0$, alors les solutions sont

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots \text{ si } b^2 \geqslant 4ac.$$

Et sinon ?... Résoudre $x^2 + 1 = 0$, impossible ?...

Des équations algébriques

Nous avons vu comment résoudre :

- Les équations de la forme $x = a$, a entier : x entier (tautologique...).
- Les équations de la forme $ax + b = 0$, avec a et b entiers : nombres rationnels.
- L'équation $x^2 = 2$.
- Plus généralement (dès les Babyloniens), si $ax^2 + bx + c = 0$, alors les solutions sont

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots \text{ si } b^2 \geqslant 4ac.$$

Et sinon ?... Résoudre $x^2 + 1 = 0$, impossible ?...

Des équations algébriques

Nous avons vu comment résoudre :

- Les équations de la forme $x = a$, a entier : x entier (tautologique...).
- Les équations de la forme $ax + b = 0$, avec a et b entiers : nombres rationnels.
- L'équation $x^2 = 2$.
- Plus généralement (dès les Babyloniens), si $ax^2 + bx + c = 0$, alors les solutions sont

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots \text{ si } b^2 \geqslant 4ac.$$

Et sinon ?... Résoudre $x^2 + 1 = 0$, impossible ?...

Des équations algébriques

Nous avons vu comment résoudre :

- Les équations de la forme $x = a$, a entier : x entier (tautologique...).
- Les équations de la forme $ax + b = 0$, avec a et b entiers : nombres rationnels.
- L'équation $x^2 = 2$.
- Plus généralement (dès les Babyloniens), si $ax^2 + bx + c = 0$, alors les solutions sont

$$x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ldots \text{ si } b^2 \geqslant 4ac.$$

Et sinon ?... Résoudre $x^2 + 1 = 0$, impossible ?...

Un besoin d'imaginaire

$$x^2 + 1 = 0.$$

Au début du 17e siècle, on veut pouvoir résoudre une telle équation : Peter Rothe de Nuremberg en 1608, Albert Girard en 1629, René Descartes en 1637 : si n est le degré du polynôme $P(x)$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet exactement n racines.

Typiquement, $x^2 + 1 = 0$ a deux racines : $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

- 1637 : Descartes appelle $\sqrt{-1}$ nombre imaginaire.
- 1777 : Euler note $i = \sqrt{-1}$.
- 1831 : Gauss introduit l'ensemble des nombres complexes, de la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Notation : on note **C** ou $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Un besoin d'imaginaire

$$x^2 + 1 = 0.$$

Au début du 17e siècle, on veut pouvoir résoudre une telle équation : Peter Rothe de Nuremberg en 1608, Albert Girard en 1629, René Descartes en 1637 : si n est le degré du polynôme $P(x)$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet exactement n racines.

Typiquement, $x^2 + 1 = 0$ a deux racines : $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

- 1637 : Descartes appelle $\sqrt{-1}$ nombre imaginaire.
- 1777 : Euler note $i = \sqrt{-1}$.
- 1831 : Gauss introduit l'ensemble des nombres complexes, de la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Notation : on note **C** ou $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Un besoin d'imaginaire

$$x^2 + 1 = 0.$$

Au début du 17e siècle, on veut pouvoir résoudre une telle équation : Peter Rothe de Nuremberg en 1608, Albert Girard en 1629, René Descartes en 1637 : si n est le degré du polynôme $P(x)$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet exactement n racines.

Typiquement, $x^2 + 1 = 0$ a deux racines : $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

- 1637 : Descartes appelle $\sqrt{-1}$ nombre imaginaire.
- 1777 : Euler note $i = \sqrt{-1}$.
- 1831 : Gauss introduit l'ensemble des nombres complexes, de la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Notation : on note **C** ou $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Un besoin d'imaginaire

$$x^2 + 1 = 0.$$

Au début du 17e siècle, on veut pouvoir résoudre une telle équation : Peter Rothe de Nuremberg en 1608, Albert Girard en 1629, René Descartes en 1637 : si n est le degré du polynôme $P(x)$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet exactement n racines.

Typiquement, $x^2 + 1 = 0$ a deux racines : $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

- 1637 : Descartes appelle $\sqrt{-1}$ nombre imaginaire.
- 1777 : Euler note $i = \sqrt{-1}$.
- 1831 : Gauss introduit l'ensemble des nombres complexes, de la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Notation : on note **C** ou $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Un besoin d'imaginaire

$$x^2 + 1 = 0.$$

Au début du 17e siècle, on veut pouvoir résoudre une telle équation : Peter Rothe de Nuremberg en 1608, Albert Girard en 1629, René Descartes en 1637 : si n est le degré du polynôme $P(x)$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet exactement n racines.

Typiquement, $x^2 + 1 = 0$ a deux racines : $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

- 1637 : Descartes appelle $\sqrt{-1}$ nombre imaginaire.
- 1777 : Euler note $i = \sqrt{-1}$.
- 1831 : Gauss introduit l'ensemble des nombres complexes, de la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Notation : on note **C** ou $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Un besoin d'imaginaire

$$x^2 + 1 = 0.$$

Au début du 17e siècle, on veut pouvoir résoudre une telle équation : Peter Rothe de Nuremberg en 1608, Albert Girard en 1629, René Descartes en 1637 : si n est le degré du polynôme $P(x)$, alors l'équation $P(x) = 0$ admet exactement n racines.

Typiquement, $x^2 + 1 = 0$ a deux racines : $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$.

- 1637 : Descartes appelle $\sqrt{-1}$ nombre imaginaire.
- 1777 : Euler note $i = \sqrt{-1}$.
- 1831 : Gauss introduit l'ensemble des nombres complexes, de la forme $a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Notation : on note **C** ou $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Bilan

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Une autre nouveauté : on ne peut pas comparer deux nombres complexes, c'est-à-dire que l'écriture $a + ib > c + id$ n'a pas de sens « raisonnable » si c ou d n'est pas nul.

> *Il n'existe pas de relation d'ordre sur* $\mathbb{C}$.

Identité d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

> *La formule la plus remarquable (...) de toutes les mathématiques.*
>
> Richard Feynman

Élue « plus belle équation de l'Histoire » par les lecteurs du *Mathematical Intelligencer* en 1988.

Bilan

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Une autre nouveauté : on ne peut pas comparer deux nombres complexes, c'est-à-dire que l'écriture $a + ib > c + id$ n'a pas de sens « raisonnable » si c ou d n'est pas nul.

Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.

Identité d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

La formule la plus remarquable (...) de toutes les mathématiques.

Richard Feynman

Élue « plus belle équation de l'Histoire » par les lecteurs du *Mathematical Intelligencer* en 1988.

Bilan

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Une autre nouveauté : on ne peut pas comparer deux nombres complexes, c'est-à-dire que l'écriture $a + ib > c + id$ n'a pas de sens « raisonnable » si c ou d n'est pas nul.

Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.

Identité d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

La formule la plus remarquable (...) de toutes les mathématiques.

Richard Feynman

Élue « plus belle équation de l'Histoire » par les lecteurs du *Mathematical Intelligencer* en 1988.

Bilan

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Une autre nouveauté : on ne peut pas comparer deux nombres complexes, c'est-à-dire que l'écriture $a + ib > c + id$ n'a pas de sens « raisonnable » si c ou d n'est pas nul.

> *Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.*

Identité d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

> *La formule la plus remarquable (...) de toutes les mathématiques.*
>
> Richard Feynman

Élue « plus belle équation de l'Histoire » par les lecteurs du *Mathematical Intelligencer* en 1988.

Bilan

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Une autre nouveauté : on ne peut pas comparer deux nombres complexes, c'est-à-dire que l'écriture $a + ib > c + id$ n'a pas de sens « raisonnable » si c ou d n'est pas nul.

> *Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.*

Identité d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0.$

> *La formule la plus remarquable (...) de toutes les mathématiques.*
>
> Richard Feynman

Élue « plus belle équation de l'Histoire » par les lecteurs du *Mathematical Intelligencer* en 1988.

Des applications des nombres complexes

- Les polynômes réels de degré n ont n racines complexes : utile en algèbre, et en analyse (résoudre des équations différentielles).
- Traitement du signal : séries de Fourier.
- Mécanique quantique : équation de Schrödinger.
- etc.

Des applications des nombres complexes

- Les polynômes réels de degré n ont n racines complexes : utile en algèbre, et en analyse (résoudre des équations différentielles).
- Traitement du signal : séries de Fourier.
- Mécanique quantique : équation de Schrödinger.
- etc.

Des applications des nombres complexes

- Les polynômes réels de degré n ont n racines complexes : utile en algèbre, et en analyse (résoudre des équations différentielles).
- Traitement du signal : séries de Fourier.
- Mécanique quantique : équation de Schrödinger.
- etc.

- Les polynômes réels de degré n ont n racines complexes : utile en algèbre, et en analyse (résoudre des équations différentielles).
- Traitement du signal : séries de Fourier.
- Mécanique quantique : équation de Schrödinger.
- etc.

Quelques sources

- M@ths et tiques : `http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/histoire-des-maths-53`
- *Histoire universelle des chiffres*, Georges Ifrah (Robert Laffont).
- *Histoires des mathématiques*, Jacques Bouveresse, Jean Itard, Emile Sallé (Encyclopoche Larousse).
- *Les mathématiques*, Ian Stewart (Belin)